COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 13 MAI 1844.

PRÉSIDENCE DE M. ÉLIE DE BEAUMONT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

« M. Liouville communique verbalement à l'Académie des remarques relatives, 1° à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques; 2° à un passage du livre des *Principes* où Newton calcule l'action exercée par une sphère sur un point extérieur.

» 1. Pour donner des exemples de fractions continues dont on puisse démontrer en toute rigueur que leur valeur n'est racine d'aucune équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

$a, b, \ldots, g, h$ étant des entiers, il suffit de se rappeler que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p}{q}$ étant deux réduites successives de la fraction continue qui exprime le développement d'une racine incommensurable x de cette équation, le quotient incomplet μ, qui vient après la réduite $\frac{p}{q}$, et sert à former la réduite sui-

vante, finira (cela résulte d'une formule de Lagrange, *voyez* les Mémoires de Berlin, année 1768) par être, pour des valeurs de q très-grandes, constamment inférieur à

$$\pm \frac{df(p, q)}{qf(p, q)\,dp},$$

expression essentiellement positive où l'on suppose

$$f(p, q) = q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = ap^n + bp^{n-1}q + \ldots + hq^n.$$

Abstraction faite des signes, on aura dès lors, à plus forte raison,

$$\mu < \frac{df(p, q)}{qdp},$$

puisque $f(p, q)$ est un entier, égal au moins à l'unité si l'on admet (ce qui est permis) que l'équation $f(x) = 0$ a été débarrassée de tout facteur commensurable; $f(p, q) = 0$ donnerait en effet $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Maintenant représentons par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$; l'inégalité ci-dessus deviendra

$$\mu < q^{n-2} f'\left(\frac{p}{q}\right).$$

Or, $f'\left(\frac{p}{q}\right)$ est une quantité finie qui tend vers la limite $f'(x)$, comme $\frac{p}{q}$ vers la limite x. En désignant par A un certain nombre fixe supérieur à cette limite, on sera donc certain d'avoir

$$\mu < \mathrm{A}q^{n-2}.$$

» Ainsi *les quotients incomplets d'une fraction continue représentant la racine x d'une équation algébrique de degré n, à coefficients rationnels, sont assujettis à ne jamais dépasser le produit d'un certain nombre constant par la puissance $(n-2)^{\text{ème}}$ du dénominateur de la réduite précédente.*

» Il suffira de donner aux quotients incomplets μ un mode de formation qui les fasse grandir au delà du terme indiqué, pour obtenir des fractions continues dont la valeur ne pourra satisfaire à aucune équation algébrique proprement dite; cela arrivera, par exemple, si, partant d'un premier quotient

incomplet quelconque, on forme chacun des suivants μ à l'aide de la réduite $\frac{p}{q}$ qui le précède, d'après la loi $\mu = q^q$, ou bien encore d'après la loi $\mu = q^m$, m étant l'indice du rang de μ.

» Au reste la méthode précédente, qui s'est offerte la première, n'est ni la seule ni même la plus simple qu'on puisse employer. Ajoutons qu'il y a aussi des théorèmes analogues pour les séries ordinaires. Nous citerons en particulier la série

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^{1.2}} + \frac{1}{a^{1.2.3}} + \ldots + \frac{1}{a^{1.2.3\ldots m}} + \ldots,$$

a étant un nombre entier.

» 2. Newton a démontré que l'action exercée sur un point extérieur par une sphère recouverte uniformément de molécules matérielles, agissant chacune en raison inverse du carré de la distance, est égale à celle que produiraient les mêmes molécules réunies au centre de la sphère. La méthode synthétique qu'il a suivie est, dans ce cas du moins, tout aussi simple, tout aussi directe, on peut dire tout aussi propre à l'invention, que les méthodes analytiques auxquelles on a eu depuis recours; en la traduisant en calcul, on en déduit un théorème sur une classe d'intégrales, et l'on se trouve conduit à une conséquence assez singulière, c'est qu'elle renferme en quelque sorte implicitement la transformation remarquable par laquelle on réduit une fonction elliptique de module c à une autre de module $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$. Ce rapprochement curieux entre deux théories si différentes sera développé ailleurs avec tous les détails convenables; nous nous bornons ici à l'indiquer. »

THÉORIE DES NOMBRES. — *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques, inséré dans le* Compte rendu *de la dernière séance; par* M. LIOUVILLE.

« Soient $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les n racines (la première réelle, les autres réelles ou imaginaires) de l'équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

que l'on peut supposer irréductible, et où $a, b, \ldots, g, h$ sont des entiers positifs, nuls ou négatifs, comme on voudra. Désignons par $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p}{q}$ deux réduites consécutives de la fraction continue dans laquelle x se développe; et par z le quotient complet qui vient après, en sorte que l'on ait

$$\frac{p}{q} - x = \pm \frac{1}{q(qz + q_0)}.$$

Enfin, posons

$$f(p, q) = q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = ap^n + bp^{n-1}q + \ldots + hq^n.$$

Par la décomposition de $f\left(\frac{p}{q}\right)$ en facteurs, opérée à l'aide des racines x,

$x_1, \ldots, x_{n-1}$, on trouve

$$\frac{p}{q} - x = \pm \frac{1}{q(qz + q_0)} = \frac{f(p, q)}{q^n . a\left(\frac{p}{q} - x_1\right) \ldots \left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)}.$$

Or, à mesure que la réduite $\frac{p}{q}$ converge vers x, la quantité

$$a\left(\frac{p}{q} - x_1\right) \ldots \left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)$$

converge aussi vers une limite finie, savoir,

$$a(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1});$$

il y a donc un certain maximum A au-dessous duquel elle restera toujours. D'un autre côté, $f(p, q)$ est un nombre entier, au moins égal à l'unité, abstraction faite du signe. On a donc

$$\frac{1}{q(qz + q_0)} > \frac{1}{Aq^n},$$

d'où

$$z < Aq^{n-2} - \frac{q_0}{q} < Aq^{n-2},$$

inégalité qui subsiste, à plus forte raison, quand on substitue au quotient complet z la partie entière qu'il contient, c'est-à-dire le quotient incomplet μ. Le théorème que nous avions en vue est ainsi démontré d'une manière simple, sans qu'on ait eu besoin de recourir à la formule de Lagrange dont nous avions d'abord fait usage. On peut, du reste, appliquer une méthode semblable aux divers genres de développements dont les quantités irrationnelles sont susceptibles, et obtenir par là des résultats intéressants. »